Polinom İnterpolasyonu
(Ara Değer Bulma)

Bir fonksiyonun sonlu sayıdaki $x_0, x_1 \cdots, x_n \in \mathrm{R}$ noktalarında aldığı $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ değerleri bilinsin (fonksiyonun kendisi bilinmiyor). Bu noktalardan geçen *n*. dereceden bir tek,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

polinumu vardır ($i = 0,1,2\ldots,n$ için $P_n(x_i) = f(x_i)$). $P_n(x)$ polinomu elde edilip bir x noktasındaki $f(x)$ değerinin yerine $P_n(x)$ alınırsa, bilinmeyen $f(x)$ değeri yaklaşık $f(x) \approx f(x) = P_n(x)$ olarak hesaplanmış olur. Bu yaklaşıma **polinom interpolasyonu** (polinom kullanarak ara değer bulma) denir.

$$(x_0, f(x_0))$$
$$(x_1, f(x_1))$$
$$\ldots$$
$$(x_n, f(x_n))$$

noktalarından geçen *n*. dereceden

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

polinumunu belirlemek için

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0,1,2\ldots,n$$

yani,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

denklem siteminden $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek bu katsayılar belirlenebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n^n) \end{bmatrix}$$

denklem sistemindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisi olarak bilinir ve singüler değildir. Ancak zayıf koşullu olduğunda sayısal hesaplamalardaki yuvarlatma hatalarından dolayı problemler çıkabilir. İnterpolasyon polinomunu belirlemek için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlere geçmeden önce aşağıdaki örnek üzerinde duralım.

Örnek 1: Sinüs fonksiyonu için

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = 0 & \sin(x_0) = \sin(0) = 0 \\
x_1 = \pi / 2 & \sin(x_1) = \sin(\pi / 2) = 1 \\
x_2 = \pi & \sin(x_2) = \sin(\pi) = 0 \\
x_3 = 3\pi / 2 & \sin(x_3) = \sin(3\pi / 2) = -1 \\
x_5 = 2\pi & \sin(x_4) = \sin(2\pi) = 1
\end{array}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{array}{l}
(0, 0) \\
(\frac{\pi}{2}, 1) \\
(\pi, 0) \\
(\frac{3\pi}{2}, -1) \\
(2\pi, 1)
\end{array}
$$

noktalarından geçen 4. derecen

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

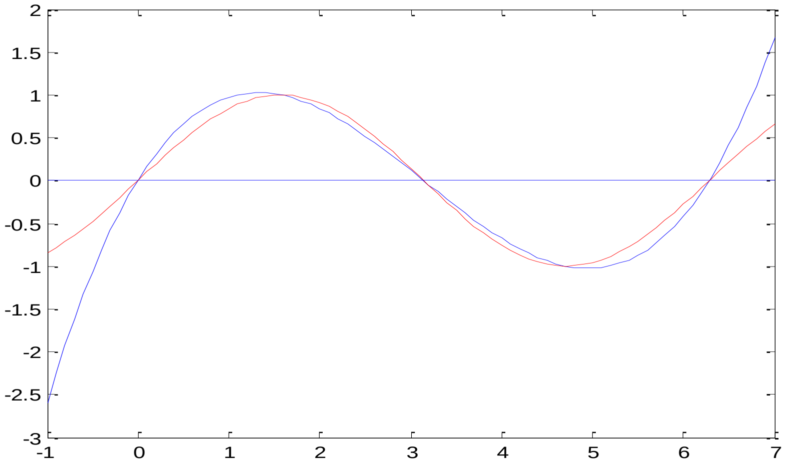
polinumunu bulmaya çalışalım.

xi	fxi
0	0
1.5708	1
3.1416	0
4.7124	-1
6.2832	0

```
>> A=[ones(5,1)  xi      xi.^2      xi.^3      xi.^4]
A =
        1        0         0          0          0
        1   1.5708    2.4674     3.8758     6.0881
        1   3.1416    9.8696     31.006     97.409
        1   4.7124    22.207     104.65     493.13
        1   6.2832    39.478     248.05     1558.5
>> a=inv(A)*fxi
a =
        0
   1.6977
 -0.81057
 0.086004
```

```
 -1.0408e-017
>> p4=1.6977*x-0.81057*x^2+0.086004*x^3-1.0408*10^(-17)*x^4
p4 =16977/10000*x-81057/100000*x^2+3098620658818977/36028797018963968*x^3-
                                    -3377589106476905/324518553658426726783156020576256*x^4
```

```
>> x=-1:.1:7;
>> plot(x,1.6977*x-0.81057*x.^2+0.086004*x.^3-1.0408*10^(-17)*x.^4)
>> hold on
>> plot(x,sin(x),'r')
>> plot([-1 7], [0 0])
```



$x \in [0, 2\pi]$ için $\sin(x)$ değerlerinin hesaplanmasında,

$P_4(x)$ =p4=1.6977*x-0.81057*x^2+0.086004*x^3-1.0408*10^(-17)*x^4

polinomu kullanılırsa interpolasyonda yapılan hatalar grafikteki gibi olur. Grafikte kırmızı çizgi $\sin(x)$, mavi çizgi $P_4(x)$ değerlerini göstermektedir.

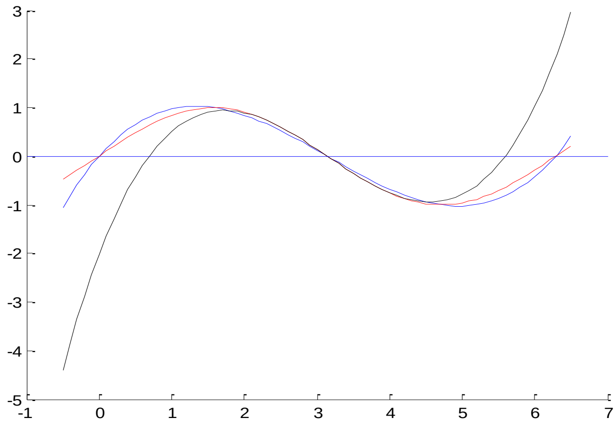
Önceki derslerden hatırladığımız gibi, sinüs fonksiyonunun değerlerini hesaplamak için Taylor açılımından faydalanılabilir. Uygun bir x_0 noktası seçip, bu nokta komşuluğunda geçerli olmak üzere Taylor serisindeki birkaç terimin oluşturduğu polinom sinüs fonksiyonu yerine kullanılabilir. Sinüs fonksiyonunu $x_0 = \pi$ noktası komşuluğunda seriye açalım.

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 - \frac{1}{720}(x-\pi)^7 - \ldots$$

olmak üzere,

$$p3(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3$$

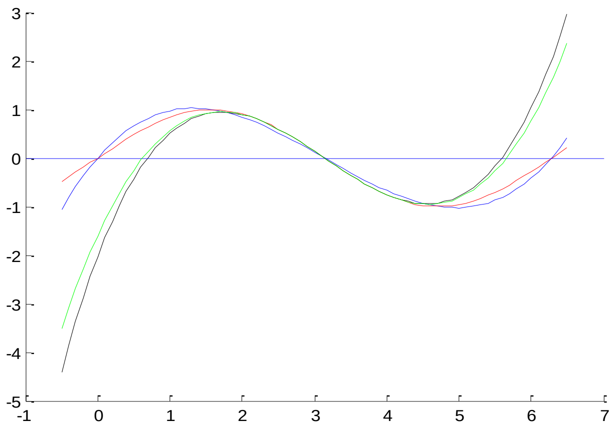
fonksiyonunu sinüs fonksiyonu yerine kullanalım. Aşağıdaki grafikte, siyah cizgi *p*3, kırmızı çizgi sinüs fonksiyonuna ve mavi çizgi yukarıdaki $P_4(x)$ polinomuna aittir.



Taylor açılımındaki,

$$p5(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5$$

kısmı sinüs fonksiyonu yerine kullanırsak yaklaşım biraz daha daha iyi olacaktır (aşağıdki grafikte yeşil çizgi).



Birinci Dereceden Polinom İnterpolasyonu (Doğrusal İnterpolasyon)

Bir fonksiyonun $x_0, x_1 \in R$ noktalarındaki $f(x_0), f(x_1)$ değerleri bilinsin (ya da kolay hesaplanabilsin). $x_0 < x < x_1$ olmak üzere, x bir ara değer olsun ve $f(x)$ bilinmesin (kolay hesaplanamasın). $f(x)$ değerini birinci derecen polinom interpolasyonu ile hesaplamaya çalışalım.

$(x_0, f(x_0))$
$(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen doğru denklemi,

$$y - y_0 = m(x - x_0)\ , \qquad m = \text{eğim} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olmak üzere, birinci dereceden interpolasyon polinomu

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$
olacaktır. Bu interpolasyon polinomunu,

$$\boxed{P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1)}$$

biçiminde yazılsın. Dikkat edilirse $P_1(x)$ polinonomu
$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{x_1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_1} x$$
ve
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_0}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_0} x$$

Polinomları cinsinden,

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1)$$

olarak yazılabilir. $L_0(x), L_1(x)$ polinomları için

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$$
$$L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$$
dır.

n. Dereceden Polinom İnterpolasyonu

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ için fonksiyon değerleri $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ olsun.
$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$
noktalarından geçen n. dereceden bir $P_n(x)$ polinomu bulunmak isteniyor. $P_n(x)$ polinomu, herbiri *n*. dereceden bir polinom olan $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ polinomları cinsinden,
$$P_n(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \ldots + L_n(x) \cdot f(x_n)$$
olarak yazılsın. $P_n(x)$ polinomunun,
$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$
noktalarından geçmesi için,

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_2(x_0) = 0, \ldots, L_n(x_0) = 0$$
$$P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, \ldots, L_n(x_1) = 0$$
$$P_n(x_2) = f(x_2) \Rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 1, L_3(x_2) = 0, \ldots, L_n(x_2) = 0$$
$$\ldots$$
$$P_n(x_n) = f(x_n) \Rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 0, \ldots, L_{n-1}(x_2) = 0, L_n(x_2) = 1$$
yani,

$$L_j(x_i)\begin{cases}1 & , \quad i=j \\ 0 & , \quad i\neq j\end{cases}$$

olmalı. Buna göre, $\mathrm{L}_0(x)=?$, $\mathrm{L}_1(x)=?,\ldots,\mathrm{L}_n(x)=?$

$\mathrm{L}_0(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Kendi kökleri $x_1,x_2,\cdots,x_n$ cinsinden $\mathrm{L}_0(x)$ polinumu,

$$L_0(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_0(x_0)=1$ olması gerektiğinden,

$$c=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

ve

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

dır.

$\mathrm{L}_1(x)$ polinumu, kendi kökleri $x_0,x_2,\cdots,x_n$ cinsinden

$$L_1(x)=c_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_1(x_1)=1$ olması gerektiğinden,

$$c_1=\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

ve

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

dır.

Benzer düşüncelerle, $L_i(x)$ polinomları

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$$

olmak üzere,

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)f(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)f(x_i)$$

elde edilir. Bu formül Lagrange formülü olarak bilinir.

<u>Örnek 2</u>: Bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun -1,0,1,4 noktalarındaki değerleri 3,2,4,-10 'dur. Bu fonksiyona 3. dereceden polinom yaklaşımı yapınız.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	0	1	4
$f(x)$	3	2	4	-10

$$L_0(x)=\frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-5)}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{-10}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-4)}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{4}$$

$$L_2(x)=\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-4)}{(2)\cdot(1)\cdot(-3)}=\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(-6)}$$

$$L_3(x)=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{60}$$

olmak üzere,

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3}L_i(x)f(x_i)$$

$$=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{-10}\times 3+\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{4}\times 2+\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(-6)}\times 4+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{60}(-10)$$

elde edilir.

Örnek 3

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1	2
2	2	4

noktalarından geçen 2. dereceden polinomu bulunuz.

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\ ,\ L_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\ ,\ L_2(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)}\cdot 1+\frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)}\cdot 2+\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)}\cdot 4$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$$

2.yol: $P_2(x)=c_0x^2+c_1x+c_2$

$x=0$ için $c_2=1$

$x=1$ için $c_0+c_1+c_2=1$

$x=2$ için $4c_0+2c_1+c_2=4$

$$\left.\begin{aligned}c_0+c_1&=1\\4c_0+2c_1&=3\end{aligned}\right\}c_0=\frac{1}{2},c_1=\frac{1}{2}$$

$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Özetlersek: Bir fonksiyonun n+1 tane noktada değeri verilsin.

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$
$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

$$f(x) = P_n(x) \quad , \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \ , \ L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right) f(x_i) \quad \text{Lagrange İnterpolasyon Formülü}$$

İnterpolasyon polinomunun tekliği: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

denklem sistemindeki katsayılar matrisi bir Vandermonde matrisi olduğundan singüler değildir ve denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 \qquad \text{çünkü } i \neq j \text{ için } x_i \neq x_j$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = x_2^2 \cdot (x_1 - x_0) + x_1^2 \cdot (x_0 - x_2) + x_0^2 \cdot (x_2 - x_1) \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2^2 - x_2 \cdot x_1^2) + (-1)^{2+1} \cdot (x_0 \cdot x_2^2 - x_2 \cdot x_0^2) + (-1)^{1+3} \cdot (x_0 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_0^2)$$

$$= x_2^2 \cdot (x_1 - x_0) + x_1^2 \cdot (x_0 - x_2) + x_0^2 \cdot (x_2 - x_1)$$

Gösterim:

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ olmak üzere Δ ileri fark operatörünü (işlemcisini) göstersin. Bu lineer operatör için,

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1}(\Delta f(x)) = \Delta^{k-1} \quad f(x+h) - f(x) \quad = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

olmak üzere, örneğin,

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta \quad f(x+h) - f(x) \quad = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

dır.

<u>**Eşit Aralıklı Noktalarda Interpolasyon**</u>:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları için $x_i - x_{i-1} = h \quad , \; i = 1, 2, \ldots n$ olsun. Bu noktalardaki fonksiyon değerleri $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$,…, $f_n = f(x_n) = f(x_0 + nh)$

$$\Delta f_0 = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(f_1 - f_0) = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta(f_2 - 2f_1 + f_0) = \Delta f_2 - 2\Delta f_1 + \Delta f_0 = (f_3 - f_2) - 2(f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

olmak üzere,

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_0}{h} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \frac{\Delta^3 f_0}{3!\, h^3} + \ldots + (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

olduğu gösterilebilir. Bu formüldeki değerler aşağıdaki ileri fark tablosundan kolayca elde edilebilir.

x	$f(x)$ x_0			
x_0	$f_0 = f(x_0)$			
		$\}\ \dfrac{f_1 - f_0}{h}$		
x_1	$f_1 = f(x_1)$		$\}\ \dfrac{\left(\frac{f_2 - f_1}{h} - \frac{f_1 - f_0}{h}\right)}{2h} = \dfrac{1}{2h^2} \quad f_2 - 2f_1 + f_0$	
		$\}\ \dfrac{f_2 - f_1}{h}$		$\}\ \dfrac{1}{2 \cdot 3h^3} \cdot \quad f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$
x_2	$f_2 = f(x_2)$		$\}\ \dfrac{\left(\frac{f_3 - f_2}{h} - \frac{f_2 - f_1}{h}\right)}{2h} = \dfrac{1}{2h^2} \quad f_3 - 2f_2 + f_1$	

$$\Big\} \frac{f_3 - f_2}{h}$$

$x_3 \qquad f_3 = f(x_3)$

.

. ...

.

$x_{n-1} \qquad f_{n-1} = f(x_{n-1})$

$$\Big\} \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$$

$x_n \qquad f_n = f(x_n)$

NOT: $\Delta^r f_i = \Delta^{r-1} f_{i+1} - \Delta^{r-1} f_i$

$x - x_0 = sh \Rightarrow x = x_0 + sh$

$x - x_1 = x_0 + sh - (x_0 + h) = (s-1)h$

$(x - x_0)\cdot(x - x_1) = sh\cdot(s-1)\cdot h$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_0 + s\cdot\Delta f_0 + \frac{s\cdot(s-1)}{2!}\cdot\Delta^2 f_0 + \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{3!}\cdot\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n f_0$$

$$= f_0 + \binom{s}{1}\cdot\Delta f_0 + \binom{s}{2}\cdot\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\cdot\Delta^3 f_0 + \ldots + \binom{s}{n}\cdot\Delta^n f_0$$

Gregory-Newton formülü denir.

Önek 4:

x	$f(x)$
-1	-3
0	1
1	0
2	4

$$f(1,5) = f(\frac{3}{2}) = P_3(\frac{3}{2}) = ?$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad h = 1, \quad x - x_0 = sh \Rightarrow \frac{x - x_0}{h} = s$$

$$x - x_0 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow s = \frac{5}{2}, h = 1$$

$$P_3\left(\frac{3}{2}\right) = -3 + \frac{5}{2}\cdot 4 + \frac{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} - 1\right)}{2!}\cdot -1 + \frac{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} - 1\right)\cdot\left(\frac{5}{2} - 2\right)}{3!}\cdot 4 = 6,375$$

Örnek 5:

$f(x) = x^3$ fonksiyonu için $x \in \; 0,6$ aralığında $h = 1$ değerini kullanarak ileri fark tablosu:

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
0	0	0						
			1					
1	1	1		6				
			7		6			
2	2	8		12		0		
			19		6		0	
3	3	27		18		0		0
			37		6		0	
4	4	64		24		0		
			61		6			
5	5	125		30				
			91					
6	6	216						

Örnek 6: Polinom biçiminde olduğu bilinen ancak derecesi bilinmeyen bir fonksiyon için aşağıdaki yuvarlatılmış gözlem değerleri elde edilmiştir.

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	1,856				
		1,070			
1	0,786		0,436		
		1,506		0,075	
2	0,720		0,511		0,001
		2,017		0,076	
3	2,737		0,587		0,002
		2,604		0,074	
4	5,341		0,661		0,003
		3,205		0,077	
5	8,606		0,738		
		4,003			
6	12,609				

a) $f(2,9) = ?$ $\quad$ $f(1,8) = ?$

b) Polinom biçiminde olan fonksiyonun derecesi hakkında ne söylenebilir?

Not: Hangi derecede değerler birbirine yakın çıkıyorsa polinom o derecedendir denilebilir. Bu polinom 3. derecedendir.